「平成 25 年度 第 1 回高知県高等学校数学コンクール問題」

1. △ABC において，∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D，∠C の二等分線が辺 AB と交わる点を E とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) AB=AC であるとき，BD=CE であることを証明せよ。

(2) BD=CE であるとき，AB=AC であると言えるか。すなわち，△ABC は二等辺三角形と言えるか。

2. n を 4 以上の整数とする。階段を上がるとき，2 段飛ばしで（3 段一度に）上がることのできる人がいる。この人が 1 段ずつか，1 段飛ばしか，2 段飛ばしかのいずれかの方法を自由に使って n 段の階段を上がる方法を調べたい。ただし，この人は 3 段以上飛ばしては上がれないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $n = 5$ のとき，階段を上がる方法は何通りあるか。

(2) 一般の n について，この階段を上がる方法は何通りあるか。その総数を n の式で表せ。

3. n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 n は，無理数 α と有理数 r を用いて α^r の形に表せることを証明せよ。

(2) 任意の自然数 n は，有理数 r と無理数 α を用いて r^α の形に表せると言えるか。さらに，任意の自然数 n は 2 つの無理数 α と β を用いて α^β の形に表せると言えるか。

4. n を 4 以上の整数とし，空間内に n 個の点が与えられている。ただし，これらの点すべてが同一平面上にあるわけではなく，かつ，どの 3 点も同一直線上にはないものとする。このとき，n 個の点のうち丁度 3 点だけを通る平面が少なくとも 1 つ存在することを証明せよ。